École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1993

MATHÉMATIQUES
1ère épreuve (option économique)

Sont autorisées:

- Règles graduées.
- Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

EXERCICE 1

f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, est A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a. Calculer les valeurs propres de f.
   On les notera $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de façon que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

   b. En déduire, sans autre calcul, les réponses aux questions suivantes :
   A est-elle diagonalisable ?
   A est-elle inversible ?

2. Pour tout $p \in \{1, 2, 3\}$, montrer qu'il existe un vecteur propre $\vec{e}_p$ de f associé à la valeur propre λ_p dont la $p^{ième}$ coordonnée dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est 1. Donner les coordonnées de $\vec{e}_p$ dans cette base.

3. Soit P la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Écrire P. Calculer P^{-1} : les calculs devront figurer sur la copie.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer A^n : on donnera de façon explicite les neuf coefficients de la matrice A^n.

EXERCICE 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1.$$

I Étude de f.

1. Former le tableau de variation de f.

2. a. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

   b. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3. Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé d'unité 5 cm, et préciser la position relative de (C) et de la première bissectrice (on ne cherchera pas d'éventuels points d'inflexion).

II Étude d'une suite récurrente.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)\,. \end{cases}$$

1. Que dire de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $u_0 = -1$ ou $u_0 = 0$?

2. On suppose ici $u_0 < -1$.

   a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < -1$.

   b. Établir que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

   c. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel qu'on déterminera.

3. On suppose ici $-1 < u_0 < 0$.

   Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

4. On suppose ici $0 < u_0$.

   Sans en donner de démonstration, quel résultat obtiendrait-on concernant la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans ce cas ?

EXERCICE 3

Question préliminaire.

Soient k et n deux entiers naturels tels que $0 < 3k \leq n$.

a. Démontrer que

$$\text{pour tout i tel que } 0 \leq i \leq k-1,\ C_n^i \leq \frac{1}{2} C_n^{i+1},$$

puis que

$$\text{pour tout i tel que } 0 \leq i \leq k,\ C_n^i \leq \frac{1}{2^{k-i}} C_n^k.$$

b. En déduire que $C_n^k \leq \sum_{i=0}^{k} C_n^i \leq 2C_n^k$.

Monsieur X vend des journaux, sur le marché, le samedi matin. Il propose, au choix, deux quotidiens A et B et il dispose d'un stock de 40 exemplaires de A et 40 exemplaires de B.

On suppose :

- qu'aucun client ne demande A et B,
- que si un client demande A (respectivement B) alors que le stock de A (respectivement B) est épuisé, il part sans demander B (respectivement A),
- que les demandes des clients sont indépendantes les unes des autres.

Un samedi, 60 clients se présentent dans la matinée. Chaque client demande soit A, soit B avec la même probabilité 0,5.

1. Y est la variable aléatoire égale au nombre de clients qui demandent A dans cette matinée.
   Déterminer la loi de Y.
   Donner son espérance et sa variance.

2. On note x la probabilité de l'événement «Monsieur X ne satisfait pas à toutes les demandes, cette matinée».

   a. Exprimer x à l'aide de la loi de Y.

   b. Déduire de l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev un majorant de x.

   c. Déduire de la question préliminaire un encadrement de x.

   d. Comparer, en utilisant éventuellement des valeurs numériques approchées données en annexe, les résultats des questions b. et c.

Annexe : $C_{60}^{20} \simeq 4{,}192 \cdot 10^{15}$; $C_{60}^{19} \simeq 2{,}045 \cdot 10^{15}$; $C_{60}^{18} \simeq 9{,}250 \cdot 10^{14}$.

EXERCICE 4

Pour tout entier naturel n, on note :

$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n \, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^n \, dx .$$

1. a. Former le tableau de variation de

   $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$

   $x \longmapsto xe^{-x^2}$.

   b. En déduire, pour tout n de IN :

   $$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}\,(n+1)} .$$

   c. Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. a. A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout n de IN :

   $$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+1} .$$

   b. En déduire la limite de I_n et celle de $n\,I_n$ quand n tend vers $+\infty$.